4階差分方程式の解の評価 (数値解析の基礎理論および偏微分方程式の数値解法シンポジウム)

三好, 甫

数理解析研究所講究録
18巻 1966年 99-112

4階差分方程式の解の評価

航空宇宙技研　三 好 甫

§1 問題

弾性振動方程式

(1) $Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = f(x,t) \qquad 0<x<1 \qquad 0<t\le T$

について考える。

初期条件は

(2) $u(x,0)=f_1(x) \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)|_{t=0}=f_2(x) \qquad 0\le x\le 1$

(1) に対する境界条件としては3種類のものが考えられ，それぞれ端点 $c=0$ または $c=1$ で

(3.1) $u(c,t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)|_{x=t}=0$; $\qquad 0\le t\le T$

(3.2) $u(c,t)=a(c,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)|_{x=c}=0$; $\qquad 0\le t\le T$

(3.3) $a(c,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)|_{x=c}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right)|_{x=c}=0$; $0\le t\le T$

初期条件と境界条件は点 (0,0) (1,0) で compatible とする。

§2 近似差分方程式

近似差分方程式を構成するために格子領域を次の様に導入する。

N, M を正の整数，γ を正の定数とし，h, k を $h=1/N$, $k=T/M$, $k=\gamma h^2$ として，格子領域を

$$\Omega^{p,q}_{m,n}=\{(x_i,t_j);\ x_i=ih,\ t_j=jk,\ i=m,m+1,\dots,n\quad j=p,p+1,\dots,q\}$$

$$\Delta^{j}_{m,n}=\{(x_i,t_j);\ x_i=ih,\ t_j=jk,\ i=m,m+1,\dots,n\}$$

と定義する。ここで m, n は整数, p, q は正の整数とする。

$\Omega^{p,q}_{m,n}$ $\Delta^{j}_{m,n}$ が領域 $0\leq x\leq 1$, $0\leq t\leq T$ の外へでる場合, そこでの $a(x,t)$ $f(x,t)$ 等は適当に定義しておいて良い。

格子点関数 $u(x_i,t_j)$を $u_{i,j}$ と表わす。また x 方向, t 方向の shift operator E_1, E_2を

$$E_1 u_{i,j} = u_{i+1,j} \qquad E_1^{-1} u_{i,j} = u_{i-1,j}$$

$$E_2 u_{i,j} = u_{i,j+1} \qquad E_2^{-1} u_{i,j} = u_{i,j-1}$$

とすると差分商は

$$u_{i,jt} = (E_2 u_{i,j} - u_{i,j})/k \qquad u_{i,j\bar{t}} = (u_{i,j} - E_2^{-1} u_{i,j})/k$$

$$u_{i,j\mathring{t}} = \frac{1}{2}(u_{i,jt} + u_{i,j\bar{t}}) \qquad u_{i,jt\bar{t}} = (u_{i,jt} - E_2^{-1} u_{i,jt})/k$$

等と表わされ,[注] x 方向の差分商, x, t の混合差分商, あるいはさらに高階の差分商も逐次定義できる。

$\Delta^{j}_{m,n}$ の上の格子点関数の内積を

$$\langle f, g \rangle^{j}_{m,n} = h\sum_{i=m}^{n} f_i g_i$$

と定義する。

(1) に対する近似差分方程式を2つ考える。上の記号に従って,

$$(4) \quad L_h^1 u_{i,j} \equiv u_{i,j\overline{tt}} + (a_{i,j} u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}} = f_{i,j} \qquad (x_i, t_j) \in \Omega^{p,q}_{m,n}$$

$$(5) \quad L_h^2 u_{i,j} \equiv u_{i,jt\bar{t}} + (a_{i,j} u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}} = f_{i,j} \qquad (x_i, t_j) \in \Omega^{p,q}_{m,n}$$

〔注〕 t は前進差分商, $\bar{t}$ は後退差分商, $\mathring{t}$ は中心差分商である。

ここで, $a_{i,j}$ に次の条件をつける。

(6) $0 < \mu_1 \leq a_{i,j} \leq \mu_2 < \infty$

(7) $|a_{i,j}-a_{i',j'}| \leq \mu\{|i-i'|h+|j-j'|k\}$ [注]

(4)は implicit type (5)は explicit type の差分方程式である。

(2)に対する近似初期条件は

(8) $u_{i,0}=f_1(x_i) \qquad x_i \in \Delta^0_{m,n}$

(8)' $u_{i,1}=f_1(xi)+kf_2(xi)+\frac{k^2}{2}\left\{f(x_i,0)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x,0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f_1(x))|_{x=x_i}\right\}$

$$x_i \in \Delta^0_{m,n}$$

(3.1)〜(3.3) に対応する近似境界条件はそれぞれ

(9.1.a) $u_{0,j} = u_{0,jx} = 0 \qquad p \leq j \leq q$

(9.1.b) $u_{N,j} = u_{N,j\bar{x}} = 0 \qquad p \leq j \leq q$

(9.2.a) $u_{0,j} = a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}} = 0 \qquad p \leq j \leq q$

(9.2.b) $u_{N,j} = a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}} = 0 \qquad p \leq j \leq q$

(9.3.a) $a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}} = (a_{0,j}u_{0,jx\bar{x}})_x = 0 \qquad p \leq j \leq q$

(9.3.b) $a_{N,j}u_{N,jxx} = (a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}})_{\bar{x}} = 0 \qquad p \leq j \leq q$

上の近似式において, 近似方程式, 近似初期条件, 近似境界条件の定義

[注] この係数 $a_{i,j}$ に関する条件は a(x,t) になおして考えた時, 滑らかな解の存在のためにはゆるすぎる様であるが, 差分方程式に対するエネルギー不等式の証明には十分である。

域は近似方程式の形，近似境界条件の組合せの種類により異なる（m,n は境界条件に依存して定まり，p,q は近似方程式の形に依存して定まる。）。境界条件の組合せは微分方程式のそれに対応して(9) の a群から1つ b群から1つとつた組合せになる。

§3 エネルギー不等式

議論を簡単にするために，この節では境界条件は (9.2.a)，(9.2.b) とする。他の組合せについては次節で述べる。すると (4) においては $p=2$，$q=M$，$m=1$，$n=N-1$，(5)においては $p=1$，$q=M-1$，$m=1$，$n=N-1$，(8) および(8)′ では $m=-1$，$n=N+1$ となる。

$\Delta^{j}_{-1,N+1}$ 上の格子点関数の集合で (9.2.a)，(9.2.b) を満足するものの集合は線型空間を作るが，これを $S^{j}_{2,2}$ で表わし $S^{j}_{2,2}$ におけるノルムを

$$\|f\|^2_j = \langle f,f \rangle^j_{0,N} \qquad \|\tilde{f}\|^2_j = \langle f,f \rangle^j_{1,N-1}$$

と定義する。

補題 1

$$2uu_{\bar{t}} = (u^2)_{\bar{t}} + k(u_{\bar{t}})^2 \tag{10}$$

$$2uu_t = (u^2)_t - k(u_t)^2 \tag{11}$$

$$2u_{\bar{t}}u_{\bar{t}\bar{t}} = (u_{\bar{t}}^{\,2})_{\bar{t}} + k(u_{\bar{t}\bar{t}})^2 \tag{12}$$

$$2u_{x\bar{x}}u_{x\bar{x}\bar{t}} = (u_{x\bar{x}}^{\,2})_t + k(u_{x\bar{x}\bar{t}})^2 \tag{13}$$

$$2u_{\hat{t}}u_{t\bar{t}} = (u_t^{\,2})_t \tag{14}$$

$$4u_{x\bar{x}}u_{x\bar{x}\hat{t}} = (u_{x\bar{x}}^{\,2})_t + (u_{x\bar{x}})_{\bar{t}} - k(u_{x\bar{x}t})^2 + k(u_{x\bar{x}\bar{t}})^2 \tag{15}$$

証明

(16) $\quad (f,g)_t = f_t g + g_t E_2 f = g_t f + f_t E_2 g = f_t g + g_t f + k f_t g_t$

(17) $\quad (f,g)_{\bar{t}} = f_{\bar{t}} g + g_{\bar{t}} E_2^{-1} f = g_{\bar{t}} f + f_{\bar{t}} E_2^{-1} g = f_{\bar{t}} g + g_{\bar{t}} f - k f_{\bar{t}} g_{\bar{t}}$

(10), (11) は (16), (17) において$f=u$, $g=u$ とおく。(12) (13) は (10) の u にそれぞれ $u_{\bar{t}}$ と $u_{x\bar{x}}$ を代入すれば得られる。(14) は $2u_{\hat{t}}u_{t\bar{t}} = (u_t+u_{\bar{t}})u_{t\bar{t}} = u_t u_{t\bar{t}} + u_{\bar{t}} u_{t\bar{t}}$ 。 第1項は(10) の u に u_t を代入し, 第2項は (11) の u に $u_{\bar{t}}$ を代入し, さらに $(u_t{}^2)_{\bar{t}} = (u_{\bar{t}}{}^2)_t$ を使えば良い。(15) も同様である。

補題 2 (M. Lees)

f_j, g_j をそれぞれ非負の discrete function でその定義域が $pk, (p+1)k, \ldots, jk, \ldots, qk$ なる様なものとする。さらに g_j は j の非減少関数で $p<m\leq q$ なる任意の整数 m に対して

$$f_m \leq g_m + ck\sum_{j=p}^{m-1} f_j \qquad c \geq 0$$

とすると

$$f_m \leq g_m \exp[c(m-p)k]$$

である。(証明は M. Lees [1] 参照)

補題 3

$S^j_{2,2}$ 上の格子点関数に関して

$$h^4\|\widetilde{u}_{x\bar{x}t}\|_j^2 \leq 16\|u_t\|_j^2$$

証明

$$h^4\|\widetilde{u_{x\bar{x}t}}\|_j^2 = h^5\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1,jt} - 2u_{i,jt} + u_{i-1,jt})^2/h^4$$ より明らか。

エネルギー不等式の証明

先ず，(4) について次の等式

(18) $$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}L_h^1 u_{i,j} = 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}f_{i,j}$$

を考える。(18) の右辺は

(19) $$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}f_{i,j} \leq k\sum_{j=2}^{M}\|f\|_j^2+\|u_{\bar{t}}\|_j^2$$

(18) の左辺は

(20) $$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}L_h^1 u_{i,j} = 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}\{u_{i,j\bar{t}\bar{t}}+$$

$$+(a_{i+1,j}u_{i+1,jx\bar{x}}-2a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}}+a_{i-1,j}u_{i-1,jx\bar{x}})/h^2\}$$

$$=2hk[\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}u_{i,jt\bar{t}}+\{\sum_{j=2}^{M}a_{-1,j}u_{0,j\bar{t}}u_{-1,jx\bar{x}}$$

$$-a_{0,j}u_{0,j\bar{t}}u_{0,jx\bar{x}}+a_{N+1,j}u_{N,j\bar{t}}u_{N+1,jx\bar{x}}-2a_{N,j}u_{N,j\bar{t}}u_{N,jx\bar{x}}$$

$$+a_{N,j}u_{N-1,j\bar{t}}u_{N,jx\bar{x}}\}+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\bar{t}}u_{i,jx\bar{x}}]$$

(20) において右辺 $\{\cdots\}$ は境界条件 (9.2.a) と (9.2.b) により 0

$u_{i,j\bar{t}}u_{i,jt\bar{t}}$ は (12) により $a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\bar{t}}u_{i,jx\bar{x}}$ は (13) により

書きなおせば，$a_{i,j}$ に関する条件 (6)，(7) を用いて，

(21) $$2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M} u_{i,j\bar{t}}L_h^1 u_{i,j} = k\sum_{j=2}^{M}(\|u_{\bar{t}}\|_j^2)_{\bar{t}}+k^2\sum_{j=2}^{M}\|u_{\bar{t}\bar{t}}\|_j^2$$

$$hk\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=2}^{M} a_{i,j}\{(u_{i,jx\bar{x}}{}^2)_{\bar{t}}+k(u_{i,jx\bar{x}\bar{t}}{}^2)$$

$$\geq \|u_{\bar{t}}\|_M^2-\|u_{\bar{t}}\|_1^2+h\sum_{i=1}^{N-1} a_{i,M}u_{i,Mx\bar{x}}^2+h\sum_{j=2}^{M-1}\sum_{i=1}^{N-1}(a_{i,j}-a_{i,j+1})u_{i,jx\bar{x}}^2$$

$$-h\sum_{i=1}^{N-1}a_{i,2}u_{i,1x\bar{x}}^2$$

$$\geq \|u_{\bar{t}}\|_M^2-\|u_{\bar{t}}\|_1^2+\mu_1\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_M^2- k\sum_{j=2}^{M-1}\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2-\mu_2\|u_{x\bar{x}}\|_1^2$$

(21)と (19) から

(22) $$(1-k)\|u_{\bar{t}}\|_M^2+\mu_1\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_M^2 \leq \|u_{\bar{t}}\|_1^2+\mu_2\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_1^2+k\sum_{j=2}^{M}\|f\|_j^2$$

$$+k\left\{\sum_{j=2}^{M-1}\|u_{\bar{t}}\|_j^2+\mu\sum_{j=2}^{M-1}\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2\right\}$$

ここで $1-k\geq\alpha>0$ なる様に k をとり,

$$\min(1-k,\mu_1) = \mu_3 \qquad \max(1,\mu) = \mu_4$$

$$\|u_{\bar{t}}\|_1^2 + \mu_2\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\| + k\sum_{j=2}^{M}\|f\|_j^2 = g_j$$

$$\|u_{\bar{t}}\|_j^2 + \|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2 = f_j$$

とおけば 補題2より

(2.3) $$f_M \leq g_M\exp[\frac{\mu_4}{\mu_3}(M-2)k] = g_M\exp[\frac{\mu_4}{\mu_3}(T-2k)]$$

が成りたつ。(エネルギー不等式)

次に(5)については次の不等式

$$(24)\qquad 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} u_{i,j\hat{t}}L_h^2u_{i,j} = 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} u_{i,j\hat{t}}f_{i,j}$$

から出発する。(24)の右辺は

$$(25)\qquad 2hk\sum\sum u_{i,j\hat{t}}f_{i,j} \le k\sum_{j=1}^{M-1}(\|f\|_j^2+\|u_t\|_j^2)$$

(24)の左辺は(4)におけると同様に $u_{i,j}\in S_{2,2}^{j}$, $a_{i,j}$ に関する条件(6), (7)および補題1の(14), (15)を使えば,

$$(26)\qquad 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} u_{i,j\hat{t}}L_h^2u_{i,j}$$

$$= 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}(u_{i,j\hat{t}}u_{i,jtt})+2hk\sum_{j=1}^{M-1}\{a_{-1,j}u_{0,j\hat{t}}u_{-1,jx\bar{x}}$$

$$-2a_{0,j}u_{0,j\hat{t}}u_{0,jx\bar{x}}+a_{0,j}u_{1,j\hat{t}}u_{0,jx\bar{x}}+a_{N+1,j}u_{N,j\hat{t}}u_{N+1,jx\bar{x}}$$

$$-2a_{N,j}u_{N,j\hat{t}}u_{N,jx\bar{x}}+a_{N,j}u_{N-1,j\hat{t}}u_{N,jx\bar{x}}\}$$

$$+2hk\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\hat{t}}u_{i,jx\bar{x}}$$

$$= 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} u_{i,j\hat{t}}u_{i,jt\bar{t}}+2hk\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\hat{t}}u_{i,jx\bar{x}}$$

$$= k\sum_{j=1}^{M-1}(\|u_t\|_j^2)_{\bar{t}}+\frac{hk}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} a_{i,j}\{(u_{i,jx\bar{x}}^2)_t+(u_{i,jx\bar{x}}^2)_{\bar{t}}$$

$$-k(u_{i,jx\bar{x}t})^2+k(u_{i,jx\bar{x}\bar{t}})^2\}$$

$$= \|u_t\|_{M-1}^2-\|u_t\|_0^2+\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\{a_{i,M-1}u_{i,Mx\bar{x}}^2+a_{i,M-2}u_{i,M-1x\bar{x}}^2-a_{i,2}u_{i,1x\bar{x}}^2$$

$$-a_{i,1}u_{i,0x\bar{x}}^2\}-\frac{1}{2}hk^2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-2}(a_{i,j+1}-a_{i,j})(u_{i,jxxt})^2$$

$$+\frac{1}{2}hk^2\sum_{i=1}^{N-1}a_{i,1}u_{i,0xxt}^2-\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=2}^{M-2}(a_{i,j+1}-a_{i,j-1})u_{i,jxx}^2$$

$$\geq \|u_t\|^2_{M-1}-\|u_t\|^2_0+\frac{\mu_1}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_M+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_{M-1})-\frac{\mu_2}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_1+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_0)$$

$$-\frac{\mu k}{2}\sum_{j=2}^{M-2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_{j+1}+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_j)-\frac{\mu_2 k^2}{2}\|\widetilde{u_{x\bar{x}t}}\|^2_{M-1}+\frac{\mu_1 k^2}{2}\|\widetilde{u_{x\bar{x}t}}\|^2_0$$

$$-\frac{\mu}{2}k^3\sum_{j=2}^{M-2}\|\widetilde{u_{x\bar{x}t}}\|^2_j$$

(25), (26) から

(27) $$\|u_t\|^2_{M-1}+\frac{\mu_1}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_{M-1})-\frac{1}{2}\mu_2 k^2\|\widetilde{u_{x\bar{x}t}}\|^2_{M-1}$$

$$\leq \|u_t\|^2_0+\frac{\mu_2}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_1+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_0)+k\sum_{j=1}^{M-1}\|f\|^2_j+\frac{1}{2}\mu k^3\sum_{j=2}^{M-2}\|\widetilde{u_{x\bar{x}t}}\|^2_j$$

$$+\frac{\mu k}{2}\sum_{j=2}^{M-2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_{j+1}+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_j)+k\sum_{j=1}^{M-1}$$

しかるに

$$k\sum_{j=1}^{M-1}\|u_t\|^2_j \leqq \frac{1}{2}k\|u_t\|^2_j+\frac{k}{2}\|u_t\|^2_0$$

なることと $k^2=j^2h^2$ を考慮して補題3を使えば (27) より,

(28) $$(1-8\mu_2\gamma^2-\frac{k}{2})\|u_t\|^2_{M-1}+\frac{\mu_1}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_M + \frac{\mu_1}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_M+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_{M-1})$$

$$\leq (1+\frac{k}{2})\|u_t\|^2_0+\frac{\mu_2}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_1+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_0)+k\sum_{j=1}^{M-1}\|f\|^2_j+(1+8\mu\gamma^2)k\sum_{j=2}^{M-2}\|u_t\|^2_j$$

$$+\frac{\mu k}{2}\sum_{j=2}^{M-2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_{j+1}+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_j)$$

ここで $1-8\mu_2\gamma^2-\frac{k}{2} \geq \sigma>0$ なる様に k, γ をえらび

$$\min(\sigma,\mu_1) = \mu_5 , \qquad \max(1+8\mu\gamma^2,\mu) = \mu_6$$

$$(1+\frac{k}{2})\|u_t\|^2_0+\frac{\mu_2}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_1+\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|^2_0)+k\sum_{j=1}^{M-1}\|f\|^2_j = g_{M-1}$$

$$\|u_t\|_j^2 + \frac{1}{2}(\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_{j+1}^2 + \|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2) = f_j$$

として補題２を適用すれば

$$(29) \qquad f_{M-1} \le g_{M-1}\exp[\frac{\mu_6}{\mu_5}(M-2)k] = g_{M-1}\exp(\frac{\mu_6}{\mu_5}(T-2k))$$

が成り立つ。（エネルギー不等式）

定理１

差分方程式 (4) の初期条件 (8) および (8)' と境界条件 (9.2.a.b) のもとにおける解はエネルギー不等式におけるノルムの意味で安定である。（無条件安定）

定理２[注]

差分方程式 (5) の初期条件 (8) および (8)' と境界条件 (9.2.a.b) のもとにおける解は $1-8\mu_2\gamma^2-\frac{k}{2}\ge\sigma>0$ なる様に γ および k をえらべばエネルギー不等式におけるノルムの意味で安定である。（条件附安定）

定理３

定理１の差分方程式の解はそれに対応する微分方程式の解が十分に滑らかならば微分方程式の解へ $O(k+h^2)$ で収束する。（収束のノルムは定理１のノルムである。）

定理４

定理２の差分方程式の安定な解はそれに対応する微分方程式の解が十分滑らかならば微分方程式の解へ $O(k^2+h^2)$ で収束する。（収束のノルムは定理２のノルムである。）

[注] 定理２における安定条件は定数係数の場合から推測された条件 $\gamma^2\le\frac{1}{4}$ よりきつくなっている。

定理3および定理4において微分方程式に十分滑らかな解（u_{tttt}, u_{xxxxxx} が有界）が存在することを要請したが，その場合は $a(x,t)$, $f(x,t)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$に関する条件はエネルギー不等式の証明で用いたものよりずっときつくなる。

定理3および4の証明は微分方程式の解wが十分滑らかならば差分方程式(4)および(5)はもともと打ち切り誤差 $O(k+h^2)$ および $O(k^2+h^2)$ をもつことと $[w]-u=v$ により誤差関数を導入し（$[w]$はwの格子点における値），v に対してエネルギー不等式を適用すればできる。

§4　任意の境界条件のもとでのエネルギー不等式

本節では (4), (8), (8)' に対する境界条件として (9.3.a), (.3.b) を取る。他の任意の境界条件の組合せに対するエネルギー不等式の証明は前節の証明と本節の証明を合せて考えれば明らかである。

(4) において $p=2$, $q=M$, $m=1$, $n=N-2$　(8) および (8)' においては $m=-1$, $n=N$ である。

$\Delta^j_{-1,N}$の格子点関数の集合で (9.3.a), (9.1.b) を満足するものの全体は線型空間を作る。これを $S^j_{3,1}$ とする。$S^j_{3,1}$におけるノルムを

$$\|f\|^2_j = \langle f,f \rangle^j_{1,N} \qquad \widetilde{\|f\|}^2_j = \langle f,f \rangle^j_{2,N-2}$$

で定義する。次の等式

$$(30) \qquad 2hk\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=2}^{M} u_{i,j\bar{t}}L^1_h u_{i,j} = 2hk\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=2}^{M} u_{i,j\bar{t}}f_{i,j}$$

から出発する。前節と同じ様に

$$(31) \quad k\sum_{j=2}^{M}(\|u_t\|^2_j+\|f\|^2_j) \geq \|u_{\bar{t}}\|^2_M-\|u_{\bar{t}}\|^2_1+2hk\sum_{i=2}^{N-1}\sum_{j=2}^{M}a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}\bar{t}}u_{i,jx\bar{x}}$$

$$+\ 2hk\Bigl\{\sum_{j=2}^{M} a_{0,j}u_{1,j\bar{t}}u_{0,jx\bar{x}}-2a_{1,j}u_{1,j\bar{t}}u_{1,jx\bar{x}}+a_{1,j}u_{2,j\bar{t}}u_{1,jx\bar{x}}$$

$$+a_{N+1,j}u_{N,j\bar{t}}u_{N+1,jx\bar{x}}-2a_{N,j}u_{N,j\bar{t}}u_{N,jx\bar{x}}+u_{N-1,j\bar{t}}a_{N,j}u_{N,jx\bar{x}}$$

(31) において境界条件が関係するのは右辺の $\{\cdots\}$ だけである。(9.3.a) (9.1.b) より $a_{i,j}\neq 0$ を使えば

$$u_{0,jx\bar{x}}=0,\quad u_{1,jx\bar{x}}=0,\quad u_{N,j\bar{t}}=0,\quad u_{N-1,j\bar{t}}=0$$

であるから，結局

$$k\sum_{j=2}^{M}\|u_{\bar{t}}\|_j^2+\|f\|_j^2 \geq \|u_{\bar{t}}\|_M^2-\|u_{\bar{t}}\|_1^2+\mu_1\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_M^2$$
$$-\mu_2\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_1^2-\mu k\sum_{j=2}^{M-1}\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2$$

となり，これは (21) と同じである。

(5) に対しても同様に前節と同じ結果が導かれる。

§5 lower order の項を含む場合のエネルギー不等式

$$(32)\qquad Lu\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(x,t)+b(x,t)u_t+c(x,t)u_{xx}$$

に対して

$$(33)\qquad L_h^1 u_{i,j}\equiv(a_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})_{x\bar{x}}+u_{\bar{t}\bar{t}}=f_{i,j}+b_{i,j}u_{i,j\bar{t}}+c_{i,j}u_{i,jx\bar{x}}$$

なる近似について考える。(L_h^2 の形の近似についても議論は同じである。)

境界条件としては (9.2.a), (9.2.b) を考える。前と同じく

$$(34)\quad 2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}L_h^1u_{i,j}=2hk\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=2}^{M}u_{i,j\bar{t}}(f_{i,j}+b_{i,j}u_{i,j\bar{t}}+c_{i,j}u_{i,jx\bar{x}})$$

ここで

$$\max_{(x_i,t_j)\in\Omega_{0,N}^{2,M}}|b_{i,j}|=B\qquad\max_{(x_i,t_j)\in\Omega_{0,N}^{2,M}}|c_{i,j}|=C$$

とする。問題になるのは右辺だけであるが

$$(35) \qquad (34)\text{の右辺} \leq k\sum_{j=2}^{M}\|f\|_j^2+(1+2B+C)k\sum_{j=2}^{M}+ck\sum_{j=2}^{M}\|\widetilde{u_{x\bar{x}}}\|_j^2$$

(ノルムは§3と同じに取る。)

(35) よりエネルギー不等式は§3と同様に導びく事ができる。

文　　　献

[1] M. Lees, Energy inequalities for the solution of differential equations, Trans. Amer. Math. Soci. vol.94, 58-73, 1960